Tema 3: Espacios L_p

13 de abril de 2010

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \qquad \big(\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C})\big)$$

Dos observaciones

- Una función continua de una función medible es medible
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x) = (u(x), v(x)) \;\; \forall x \in \Omega$. Entonces:

$$f \;\text{ medible} \iff u, v \;\text{ medibles}$$

Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible $\iff$ $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f + g,\ f\,g \in \mathcal{L}_0(\mu)$ (álgebra sobre $\mathbb{K}$)
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu),\ p \in \mathbb{R}^+ \implies |f|^p$ medible positiva
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^-$ medibles positivas
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies \exists\ \alpha \in \mathcal{L}_0(\mu)$:

$$|\alpha(x)| = 1,\ f(x) = \alpha(x)\,|f(x)| \quad (x \in \Omega)$$

- $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}_0(\mu),\ \{f_n(x)\} \to f(x)\ \ \forall x \in \Omega \implies f \in \mathcal{L}_0(\mu)$

Espacios L_p

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $p \in [0, \infty]$:

$p = 0$ Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$ Funciones p-integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

$p = \infty$ Funciones esencialmente acotadas:

$$f \in \mathcal{L}_0(\mu), \quad \text{ess sup}\,|f| = \text{mín}\{M \in [0, \infty] : |f| \leqslant M \text{ c.p.d.}\}$$

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \text{ess sup}\,|f| < \infty\}$$

Caso $1 \leqslant p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_p seminorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$\nu_p(f) = 0 \iff f \in N(\mu) := \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : f = 0 \text{ c.p.d.}\} \subseteq \mathcal{L}_p(\mu)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$ espacio normado

Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \text{ess sup}\,|f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

$\mathcal{L}_\infty(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_∞ seminorma en $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup}\,|f| \quad (f \in L_\infty(\mu))$$

$L_\infty(\mu)$ espacio normado

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \quad \Longrightarrow \quad (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

ν_p es una pseudonorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \lceil f \rceil_p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

$$d_p(f,g) = \lceil f - g \rceil_p = \int_\Omega |f-g|^p \, d\mu \quad (f, g \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$ espacio métrico

Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

$$\nu_0(f) = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

ν_0 es una pseudonorma en $\mathcal{L}_0(\mu)$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu)/N(\mu) \quad \lceil f \rceil_0 = \nu_0(f) \quad (f \in L_0(\mu))$$

$$d_0(f,g) = \lceil f - g \rceil_0 \quad (f,g \in L_0(\mu))$$

$L_0(\mu)$ espacio métrico

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $\quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real: $L_p(\mu,\mathbb{C}) = L_p(\mu,\mathbb{R}) \oplus i\,L_p(\mu,\mathbb{R})$
- $L_p(\mu,\mathbb{R})$ retículo vectorial:

$$f \leqslant g \iff \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}\big) = 0 \quad (f \leqslant g \ \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g,\ f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$$

$$[f \vee g](x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad [f \wedge g](x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{c.p.d.}$$

$$f \in L_p(\mu,\mathbb{R}) \implies f^+, f^- \in L_p(\mu)$$

$$f^+ = f \vee 0; \quad f^- = -(f \wedge 0); \quad f = f^+ - f^-; \quad |f| = f^+ + f^-$$

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu)$ $\iff$ $\left\{\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu)$ $\iff$ $\{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

  $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$ $\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Implicaciones (μ finita)

- $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu)$ $\implies$ $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ c.p.d. $\implies$ $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$ $\implies$ $\{f_{\sigma(n)}\} \to f$ c.p.d.

Teorema de Riesz-Fisher

- $L_p(\mu)$ es un espacio de Banach $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$
- $L_p(\mu)$ es un espacio métrico completo $(0 \leqslant p < 1)$

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

$$\int_\Omega f\,d\mu \;=\; \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^+\,d\mu - \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^-\,d\mu + i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^+\,d\mu - i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^-\,d\mu$$

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu < \infty$

Propiedades

$I : L_1(\mu) \to \mathbb{K}, \quad I(f) = \displaystyle\int_\Omega f\,d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$

- Lineal
- Continuo:

$$|I(f)| = \left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mu = \|f\|_1$$

- Positivo:

$$f \in L_1(\mu,\mathbb{R}),\; f \geqslant 0 \implies \int_\Omega f\,d\mu \geqslant 0$$

Teorema de la convergencia dominada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que:

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se verifica que:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \right\} \to 0$$

En particular, $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y

$$\left\{ \int_\Omega f_n \, d\mu \right\} \to \int_\Omega f \, d\mu$$

Si hubiéramos supuesto que $g \in \mathcal{L}_p(\mu)$, con $0 < p < \infty$, hubiéramos obtenido:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right\} \to 0$$

y en particular $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$.

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \operatorname{Lin}\{\chi_E : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \infty\} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

- Para $0 \leqslant p < \infty$, $S(\mu)$ es denso en $L_p(\mu)$

¿$p = \infty$?

Funciones simples:

$$\tilde{S}(\mu) := \operatorname{Lin}\{\chi_E : E \in \mathcal{A}\}$$

- $\tilde{S}(\mu)$ es denso en $L_\infty(\mu)$